Acta et Commentationes, Exact and Natural Sciences, nr. 2(6)2018 ISSN 2537-6284
Petru Moloşnic, Vasile Neagu, p. 117-123

ON COMPACTNESS OF SOME INTEGRAL OPERATORS WITH CAUCHY KERNELS

Petru MOLOȘNIC, conf.univ.,dr.
Universitatea Agrară din Moldova
Vasile NEAGU, prof. univ.,dr.hab.
Universitatea de Stat din Moldova

Abstract. In this paper, it is proved that the integral operator $S^* - S$ is compact if the contour of integration is of the Lyapunov type. An example is brought to show that this property of the operator $S^* - S$ becomes false if the contour of integration has angular points.
Keywords: singular integral operator, compact operator, piecewise Lyapunov contour.
2010 Mathematics Subject Classification: 34G10

ASUPRA COMPACTICITAȚII UNOR OPERATORI INTEGRALI CU NUCLEE DE TIP CAUCHY

Rezumat. În lucrare se demonstrează că operatorul integral singular $S^* - S$ este compact în cazul în care conturul de integrare este de tip Lyapunov. Se construiește un exemplu care arată că această proprietate a operatorului $S^* - S$ devine falsă dacă conturul are puncte unghiulare.
Cuvinte-cheie: operator integral singular, operator compact, contur Lyapunov pe porțiuni.

1. Introducere

Fie Γ un contur compus pe planul complex $\mathbb{C}$ și S operatorul integral singular cu nucleul Cauchy

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau,\ t \in \Gamma. \tag{1.1}$$

În lucrare se demonstrează că în cazul în care conturul Γ este de tip Lyapunov atunci operatorul $S - S^*$ este compact în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$, unde

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{n} |t - t_k|^{\beta_k},\ -1 < \beta_k < p-1,\ k = 1,2,...,n. \tag{1.2}$$

Se construiește și se analizează un exemplu care demonstrează că dacă conturul Γ are puncte unghiulare, atunci operatorul $S - S^*$ încetează a mai fi compact. Din faptul că proprietatea operatorului $S - S^*$ de a fi compact depinde de netezimea conturului de integrare rezultă că normele esențiale ale operatorilor $S, P = \frac{1}{2}(I + S)$ și $P = \frac{1}{2}(I - S)$ depind de mărimile unghiurilor formate de contur în punctele sale unghiulare. Astfel, în consecință, metodele de cercetare elaborate de către matematicianul I. Simonenko în cazul ecuațiilor integrale singulare pe contururi cu puncte unghiulare necesită unele precizări și modificări.

2. Operatorul S^*

Vom stabili câteva proprietăți ale operatorului S^* începând cu determinarea formei explicite al acestui operator (a se vedea [1] și [2]). Fie $\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)$ și $\psi \in L_q(\Gamma,\rho^{1-q})$, unde $p^{-1}+q^{-1}=1$, atunci

$$\left|\int_\Gamma \varphi(t)\ \bar{\psi}(t)|dt|\right| = \left|\int_\Gamma \varphi(t)\rho^{1/p}(t)\ \bar{\psi}(t)\rho^{-1/p}(t)|dt|\right| \le$$

$$\left(\int_\Gamma |\varphi(t)|^p\ \rho\ (t)\ |dt|\right)^{1/p}\left(\int_\Gamma |\bar{\psi}(t)|\,\rho^{-q/p}(t)|dt|\right)^{1/q} = \|\varphi\|_{L_p(\Gamma,\rho)}\|\psi\|_{L_q(\Gamma,\rho^{1-q})}.$$

Din teorema lui Riesz despre forma generală a operatorului liniar și mărginit în spațiul $L_p(\Gamma)$ rezultă următoarea afirmație.

Spațiul conjugat al spațiului $L_p(\Gamma,\rho)$ este spațiul $L_q(\Gamma,\rho^{1-q}), p^{-1}+q^{-1}=1$.

În mod obișnuit aceasta înseamnă că toate funcționalele liniare și continue din $L_p^*(\Gamma,\rho)$ au următoarea formă

$$\Psi(\varphi)=\int_\Gamma \varphi(t)\bar{\psi}(t)|dt| \quad (\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)),$$

unde $\psi \in L_q(\Gamma,\rho^{1-q})$ și, în plus,

$$\|\Psi\|_{L_p^*(\Gamma,\rho)} = \|\psi\|_{L_q(\Gamma,\rho^{1-q})}.$$

Menționăm că dacă ponderea $\rho(t)=\prod_{k=1}^{n}|t-t_k|^{\beta_k}$ verifică condițiile

$$-1<\beta_k<p-1,\ k=1,2,...,n, \tag{2.1}$$

atunci ponderea $\rho^{1-q}(t)=\prod_{k=1}^{n}|t-t_k|^{(1-q)\beta_k}$ verifică condițiile

$$-1<(1-q)\beta_k<q-1. \tag{2.2}$$

Așadar, dacă condițiile (2.1) și (2.2) sunt verificate, atunci din teorema lui B. Hvedelidze [3] rezultă că operatorul S este mărginit și în spațiul $L_q(\Gamma,\rho^{1-q})$.

Fie $t \in \Gamma$. Se vede ușor că are loc egalitatea

$$dt = h(t)|dt|,$$

unde $h(t)=exp(i\theta(t))$, iar $\theta(t)$ este unghiul format de tangenta la curba Γ cu semiaxa pozitivă reală. Funcția $h(t)$ este definită în orice punct nesingular și este mărginită și continuă pe porțiuni.

Teorema 2.1. *Fie Γ un contur compus și pentru funcția $\rho(t)$ sunt verificate condițiile (2.1). În spațiul $L_q(\Gamma,\rho^{1-q})$ operatorul S^* este legat de operatorul S prin relația*

$$S^* = -HSH, \tag{2.3}$$

unde operatorul H *este definit de egalitatea*

$$(H\varphi)(t)=\overline{h(t)\varphi(t)}.$$

Demonstrație. Fie φ și ψ funcții raționale pe conturul Γ. În integrala iterată

$$(S\varphi,\psi)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\overline{\psi(t)}|dt|\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

în care o integrală este obișnuită iar alta singulară, avem dreptul [3] să schimbăm ordinea de integrare. Obținem

$$(S\varphi,\psi)=\frac{1}{\pi i}\int\varphi(t)h(t)dt\int_{\Gamma}\frac{\overline{\psi(\tau)}h^{-1}(\tau)}{\tau-t}d\tau=-(\varphi,\overline{HSH\psi}).$$

Prin urmare $S^*=-HSH.$ Teorema este demonstrată.

Considerăm câteva exemple. Fie Γ un arc de cerc, atunci $\tau=t_0+Re^{i\theta},d\tau=Re^{i\theta}id\theta=i(\tau-t_0)|d\tau|$. Prin urmare, $h(\tau)=i(\tau-t_0)$. În acest caz are loc egalitatea

$$(S^*\varphi)(t)=\frac{-1}{\pi(t-t_0)}\int_{\Gamma}\frac{i(\tau-t_0)\varphi(\tau)}{R^2(\overline{\tau}-t)}\overline{d\tau}=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=(S\varphi)(t).$$

În mod similar, dacă $\Gamma=[a,b]$, atunci $|d\tau|=d\tau,h(t)\equiv1$ și $S^*=S$. Vom arăta că, într-un anumit sens, cu aceste exemple au fost epuizate toate curbele în care operatorul S este autoadjunct în spațiul $L_2(\Gamma)$. Are loc următoarea teoremă.

Teorema 2.2. *Dacă operatorul* S *este autoadjunct în spațiul* $L_2(\Gamma)$ *, atunci* Γ *este un cerc, un arc de cerc, sau o parte a unei drepte.*

Demonstrație. Fie $S^*=S,$ atunci pentru orice funcție φ din $L_2(\Gamma)$ are loc egalitatea

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{1}{\tau-t}-\frac{h^{-1}(t)h^{-1}(\tau)}{\overline{\tau}-\overline{t}}\right)\varphi(\tau)d\tau=((S-S^*)\varphi)(t)\equiv0.$$

Din această relație rezultă că

$$(\overline{\tau}-\overline{t})h(t)h(\tau)\equiv\tau-t. \tag{2.4}$$

Fie s abscisa de arc și $t=t(s)-$ ecuația (naturală) a curbei Γ. Așa cum $dt=h(t)ds$, atunci $h(t(s))=t'(s)$ și egalitatea (2.4) poate fi transcrisă sub forma

$$t'(s)t'(s_0)=\frac{t(s)-t(s_0)}{\overline{t(s)}-\overline{t(s_0)}}. \tag{2.5}$$

Din această egalitate rezultă existența derivatei de orice ordin a funcției $t(s)$. Derivând ambele părți ale egalității

$$(\overline{t(s)}-\overline{t(s_0)})t'(s)t'(s_0)=t(s)-t(s_0)$$

odată în raport cu s, apoi în raport cu s_0, obținem

$$\overline{(t'(s)}t'(s)t'(s_0)-(\overline{t(s_0)}-\overline{t(s)})t''(s)t'(s_0)=t'(s)$$

și

$$\overline{(t'(s_0)}t'(s)t'(s_0)+(\overline{t(s_0)}-\overline{t(s)})t'(s)t''(s_0)=t'(s_0).$$

Ținând cont de egalitatea $t'(s)\overline{t'(s)}\equiv 1$,atunci din ultimele două relații obținem

$$(\overline{t(s_0)}-\overline{t(s)})(t'(s)t''(s_0)-t''(s)t'(s_0)=0.$$

Din egalitatea

$$t''(s)/(t'(s)=t''(s_0)/t'(s_0) \tag{2.6}$$

și din faptul că funcția $t=t(s)$ nu poate fi constantă obținem că raportul $t''(s)/(t'(s)$ este constant $=k$). De aici, pentru $k\neq 0$ rezultă că $t(s)=ce^{ks}+c_1$. Deoarece $|t'(s)|\equiv 1$,atunci Re$k = 0$ ceea ce înseamnă că funcția $t=t(s)$ reprezintă ecuația unui cerc, sau a unui arc de cerc. Pentru $k=0$ soluția ecuației (2.6) este funcția $t=cs+c_1$, în care $|c|=1$.

Teorema este demonstrată.

Menționăm că din cele demonstrate mai sus operatorul S este autoadjunct în spațiul $L_2(\Gamma)$ și în cazul în care Γ este orice dreaptă sau o parte a unei drepte.

3. Compacticitatea operatorului S^*-S

În caz general operatorii S și S^* nu coincid, însă pentru o clasă vastă de curbe acești operatori diferă printr-un termen compact. Această afirmație se conține în următoarea teoremă.

Teorema 3.1. *Fie Γ un contur compus de tip Lyapunov și S^* conjugatul operatorului S care acționează în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$. Atunci operatorul S^*-S este compact în spațiul $L_q(\Gamma,\rho^{1-q})$.*

Demonstrație. Pentru început considerăm Γ un contur simplu închis de tip Lyapunov. Notăm cu Γ_0 cercul unitate, iar prin $t=\beta(z)$ funcția lui Riemann care transformă conform discul unitate în domeniul G^+, mărginit de Γ. Operatorul S poate fi (a se vedea [2]) exprimat sub forma

$$S=B^{-1}S_0B+T_1, \tag{3.1}$$

unde

$$(S_0\varphi)(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\varphi(\xi)}{\xi-z}d\xi,\ z\in\Gamma_0, \tag{3.2}$$

$$(T_1\varphi)(\xi)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\left(\frac{\beta'(\xi)}{\beta(\xi)-\beta(z)}-\frac{1}{\xi-z}\right)\varphi(\beta(\xi))d\xi, \tag{3.3}$$

$$(B\varphi)(z)=\varphi(\beta(z)),\ \ (B^{-1}\psi)(t)=\varphi(\omega(t)),$$

iar $z=\omega(t)$ este funcția inversă funcției $t=\beta(z)$. Nucleul operatorului integral (3.3) are singularități slabe pe conturul Γ_0 și, prin urmare [4], este compact în spațil $L_q(\Gamma,\rho^{1-q})$. Determinăm operatorii B^* și $(B^{-1})^*$. Fie φ și ψ funcții raționale pe conturul Γ_0, atunci

$$(B\varphi,\psi)=\int_{\Gamma_0}\varphi(\beta(z))\psi(z)|dz|=\int_{\Gamma}\varphi(t)\psi(\omega(t))|\omega'(t)|dt|=(\varphi,\left|\frac{d\omega}{dt}\right|B^{-1}\psi).$$

Din această egalitate rezultă că

$$B^{*}=\left|\frac{d\omega}{dt}\right|B^{-1} \text{ și } (B^{-1})^{*}=\left|\frac{d\beta}{dz}\right|B.$$

Operatorul $S_0|\beta'(t)|-|\beta'(t)|S_0$ este compact, aceasta rezultă din teorema 4.3 din lucrarea [2]. Deoarece $S_0^{*}-S_0$ este compact, atunci

$$S^{*}-S=|\omega'(t)|B^{-1}S_0|\beta'(t)|B+T_1^{*}-B^{-1}S_0B-T_1=$$
$$|\omega'(t)||\beta'(\omega(t))|B^{-1}S_0B-B^{-1}S_0B+T_2=T_2,$$

unde T_2 este un operator compact. Vom considera acum cazul în care conturul Γ este un arc simplu deschis. Fie $\tilde{\Gamma}$ un contur simplu închis care conține arcul Γ. Notăm cu $\chi(t)$ funcția caracteristică al arcului Γ:

$$\chi(t)=\begin{cases}1, & t\in\Gamma\\ 0, & t\in\tilde{\Gamma}\setminus\Gamma\end{cases}.$$

Spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$ în mod obișnuit poate fi identificat cu subspațiul funcțiilor **N** de forma $\chi\tilde{\varphi}$ $(\tilde{\varphi}\in L_p(\tilde{\Gamma},\rho)$. Subspațiul **N** este invariant în raport cu operatorul $A=\chi\tilde{S}\chi I$,unde

$$(\tilde{S}h)(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}}\frac{h(\xi)}{\xi-z}d\xi\,,\ z\in\tilde{\Gamma},$$

iar restricția acestui operator pe spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$ coincide cu operatorul S. În baza celor demonstrate, avem $A^{*}=\chi\tilde{S}^{*}\chi I=\chi(\tilde{S}+T)\chi I$, unde T este un operator compact. De aici rezultă că operatorul $S^{*}-S$ este compact.

Considerăm acum cazul general în care Γ este alcătuit dintr-un număr finit de arce și curbe închise $\Gamma_1,\Gamma_2,...,\Gamma_2$. Fie $\chi_j(t)$ funcția caracteristică a curbei Γ_j și R_j operatorul definit în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$ prin relația $R_j=\chi_j I$. Atunci $S=\sum_{j,k=1}^{n}R_jSR_k$. Operatorii $R_jSR_k(j\neq k)$ sunt operatori integrali cu nuclee continue (amintim că curbele Γ_j și Γ_k $(j\neq k)$ nu au puncte comune), prin urmare sunt compacți. Restricția operatorilor R_jSR_k pe spațiul $L_p(\Gamma_j,\rho)(=R_jL_p(\Gamma,\rho))$ coincide cu operatorul S. În baza celor deja demonstrate avem $(R_jSR_j)^{*}=R_jSR_j+T_j$, unde T_j sunt operatori compacți. De aici rezultă că $S^{*}-S$ este compact. Teorema este demonstrată.

Teorema 3.1 devine falsă dacă cel puțin într-un punct al conturului Γ nu este îndeplinită condiția lui Lyapunov. Presupunem, de exemplu, că $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, unde Γ_1 și Γ_2 sunt segmente de dreaptă care unesc punctul $z=0$ cu $z=1$ şi, respectiv $z=0$ cu $z=i$. În punctul $z=0\in\Gamma$ conturul formează un unghi de măsură $\pi/2$. Vom arăta că în acest caz operatorul $S^{*}-S$ nu este compact în spațiul $L_2(\Gamma)$.

Fie $t \in \Gamma$. Așa cum $|dt| = dt$ pentru $t \in \Gamma_1$ și $dt = i|dt|$ pentru $t \in \Gamma_2$, atunci $h(t) = 1$ pentru $t \in \Gamma_1$ și $h(t) = i$ pentru $t \in \Gamma_2$. În baza teoremei 2.1 avem $S^* = -HSH$.

Admitem că operatorul $S^* - S$ este compact, atunci operatorul $T = \mathrm{X}\left(HSH + S\right)$, unde X este funcția caracteristică a lui Γ_2, de asemenea este compact. În spaţiul $L_2(\Gamma)$ considerăm şirul $\{\varphi_n(t)\}$ normat de funcţii definit prin relaţiile

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{pentru} \quad t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]; \\ 0, & \text{pentru} \quad t \in \Gamma \setminus \left[0; \dfrac{1}{n}\right]. \end{cases} \qquad n \in N,$$

și vom arăta că din șirul $\psi_n = T\varphi_n$ nu se poate extrage nici un subşir convergent. În baza definiţiei operatorului T avem

$$\left(T\varphi_n\right)(t) = \mathrm{X}(t)\left(S + HSH\right)\varphi_n = \frac{\mathrm{X}(t)\sqrt{n}}{\pi i} \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau - \bar{t}}\right) d\tau =$$

$$= \frac{\mathrm{X}(t)(1+i)}{\pi i} \sqrt{n} \int_0^{1/n} \frac{t + |t|}{\tau^2 + |t|^2} d\tau =$$

$$\frac{\mathrm{X}(t)(1+i)}{\pi i} (ln(1 + \frac{1}{n^2 |t|^2}) + 2arctg \frac{1}{|t| n}).$$

Fie $u_n(t) = \mathrm{X}(t) ln(1 + \dfrac{1}{n^2 |t|^2}$, $v_n(t) = \mathrm{X}(t)\sqrt{n} arctg \dfrac{1}{|t| n}$ și $\psi_n = \dfrac{1}{2} u_n + v_n$.

Din relațiile

$$\|u_n\|^p_{L_p(\Gamma)} = n^{p/2} \int_0^1 ln^p(1 + \frac{1}{n^2 x^2}) dx =$$

$$n^{p/2} \int_0^n ln^p(1 + \frac{1}{y^2}) \frac{dy}{n} \le n^{\frac{p-2}{p}} \int_0^n ln^p(1 + \frac{1}{y^2}) dy = c_1 n^{\frac{p-2}{p}},$$

$$|v_n|^p_{L_p(\Gamma)} = n^{p/2} \int_0^1 (\mathrm{arctg} \frac{1}{nx})^p dx = n^{p/2} \int_0^{\mathrm{n}} \left(\mathrm{arctg} \frac{1}{y}\right)^p \frac{dy}{n} \le$$

$$n^{\frac{p-2}{p}} \int_0^\infty \left(\mathrm{arctg} \frac{1}{y}\right)^p dy = c_2 n^{\frac{p-2}{p}}$$

rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} \|T\varphi_n\|_{L_p(\Gamma)} = 0$, pentru $1 < p < 2$.

Astfel, dacă şirul $\psi_n = T\varphi_n \left(\in L_2\left(\Gamma\right)\right)$ ar conţine un subşir convergent, atunci acest subşir în mod necesar ar converge la zero. Deoarece $|\psi_n(t)| \ge v_n(t)$, atunci

$$\|\psi_n\|_{L_2(\Gamma)} \ge \|v_n\|_{L_2(\Gamma)} = \int_0^n arctg^2 \frac{1}{y} dy \ge \int_0^1 arctg^2 \frac{1}{y} dy > 0.$$

De aici rezultă că $\{\psi_n\}$ nu conţine nici un subşir convergent în spaţiul $L_2(\Gamma)$. Aşadar, operatorul T nu este compact în spaţiul $L_2(\Gamma)$.

Bibliografie

1. Ицкович И.А. Интегралы типа Коши как операторы в гильбертовом пространстве. Ученые записки Кишиневского госуниверситета, 1952, том V, с. 37-41.
2. Gohberg I., Krupnik N. One-dimensional Linear Singular Integral Equations. vol. 1. Operator Theory 53, Birkhäuser, Basel-Boston, 1992.
3. Hvedelidze B.V. Linear discontinuous boundary problems of the theory of singular integral equations and some applications of them. Trudy Tbilisk. Mat. Inst. Akad. Nauk Gruz. SSR, 1956, 23, c. 3-158, (Russian).
4. Красносельский М.А. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: "Наука", 1966.